

广义 Orlicz 空间的 λ -性质和一致 λ -性质

王俊明, 姜榕泽, 吴丹

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 根据各种不同理论和应用的需要, Orlicz 空间有各种不同形式的推广, 赋 p -Amemiya 范数的 Orlicz 空间是 Orlicz 空间的推广, 记为 $L_{M,p}$ 空间. λ -性质和一致 λ -性质是 Banach 空间几何理论中的重要概念, 它与端点和严格凸性有着紧密的联系. 本文中我们得出了 $L_{M,p}$ 空间具有 λ -性质, 并给出了 $L_{M,p}$ 空间具有一致 λ -性质的充要条件.

关键词: $L_{M,p}$ 空间; λ -性质; 一致 λ -性质.

中图分类号: O177.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2012)01-0105-03

λ -property and Uniformly λ -property of Generalized Orlicz Spaces Endowed with p -Amemiya Norms ($1 \leq p \leq \infty$)

WANG Jun-ming, JIANG Rong-ze, WU Dan

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: According to the requirements of various theories and application, there are many generalizations of Orlicz spaces. The spaces $L_{M,p}$ equipped with the p -Amemiya norms are the generation of the Orlicz spaces. λ -property and uniformly λ -property are important geometric properties in Orlicz spaces. They have close connections with extreme points and strict convexity. In this paper, we conclude that $L_{M,p}$ ($1 \leq p \leq \infty$) spaces have the λ -property and the necessary and sufficient conditions that $L_{M,p}$ ($1 \leq p \leq \infty$) spaces have the uniformly λ -property.

Key words: $L_{M,p}$ spaces; λ -property; uniformly λ -property

1 符号与定义

定义 1 映射 $M: R \rightarrow [0, +\infty)$ 称为 N 函数: 如果 M 在 R^+ 上是偶的, 连续的凸函数, 且

$$M(0) = 0, \lim_{u \rightarrow 0} \frac{M(u)}{u} = 0, \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty$$

在 G 上的一实值可测函数 x 定义其凸模

$$\rho_M(x) = \int_G M(x(t)) dt.$$

定义 2 令 X 是可测函数构成的线性空间, $x \in$

X , 记

$$\|x\|_{M,p} = \begin{cases} \inf_{k>0} k^{-1} (1 + \rho_M(kx))^{\frac{1}{p}}, & \text{如果 } 1 \leq p < \infty \\ \max\{1, \rho_M(kx)\}, & \text{如果 } p = \infty \end{cases}$$

为 p -Amemiya 范数(简记为 p -范数).

显然有

$$\|x\|_{M,1} = \|x\|^0, \|x\|_{M,\infty} = \|x\|$$

且这些 p -Amemiya 范数是相互等价的.

定义 3 设 (G, Σ, μ) 是非原子, 完备的测度空间, $L^0(\mu)$ 是所有定义在 G 上的依测度等价的实值可测函数全体,

收稿日期: 2010-12-13

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(11551090)

作者简介: 王俊明(1970—), 男, 教授, 硕士生导师, E-mail: wangjunming@hrbust.edu.cn;

吴丹(1986—), 女, 硕士研究生, E-mail: wudan_1688@163.com.

$X_{\rho M} = \{x \in L^0: \text{存在 } \lambda > 0, \text{使得 } \rho_M(\lambda x) < \infty\}$

$X'_{\rho M} = \{x \in L^0: \text{任意 } \lambda > 0, \text{都有 } \rho_M(\lambda x) < \infty\}$

记

$L_{M,p} = (X_{\rho M}, \|\cdot\|_{M,p}), E_{M,p} = (X'_{\rho M}, \|\cdot\|_{M,p})$

且 $L_{M,p}$ 和 $E_{M,p}$ 都是 Banach 空间.

定义 4 X 是 Banach 空间, 称 $x_0 \in S(X)$ 是端

点: 如果 $y, z \in S(X), x_0 = \frac{y+z}{2}$, 蕴含 $y = z$; 若 $S(X)$

上每一点都是端点, 则称 X 是严格凸空间 (R). SC_M

表示 M 的所有严格凸点, 记

$$c_M = \sup\{u \geq 0: M(u) < \infty\}$$

则

$$SC_M \subset \{u \in R: M(u) < \infty\} \cup \{\pm c_M\}$$

记

$$\alpha_p: X \rightarrow [-1, \infty]$$

$$\alpha_p(x) = \begin{cases} \rho_M^{p-1}(x) \rho_N(p_+(|x|)) - 1, & \text{如果 } 1 \leq p < \infty \\ -1, & \text{如果 } p = \infty, \rho_M(x) \leq 1 \\ \rho_N(p_+(|x|)), & \text{如果 } p = \infty, \rho_M(x) > 1 \end{cases}$$

$$K_p^*: X \rightarrow [0, +\infty), K_p^*(x) = \inf\{k \geq 0, \alpha_p(kx) \geq 0\}$$

$$K_p^{**}: X \rightarrow (0, +\infty], K_p^{**}(x) = \sup\{k \geq 0, \alpha_p(kx) \leq 0\}$$

易知, 对任意的 $1 \leq p \leq \infty$, 有

$$K_p^*(x) \leq K_p^{**}(x)$$

记 $K_p(x) = \{0 < k < \infty: K_p^*(x) \leq k \leq K_p^{**}(x)\}$

定义 5 称 Orlicz 函数 M 是 K_p 唯一的是指: 对任意的 $x \in X_{\rho M} \setminus \{0\}$, 有

$$0 < K_p^*(x) \leq K_p^{**}(x) < \infty, (\text{其中 } 1 \leq p \leq \infty).$$

定义 6 对任意的 $x \in B(X)$, 记

$$\lambda(x) = \sup\{\lambda \in [0, 1]: x = \lambda e + (1 - \lambda)y,$$

$$y \in B(X), e \in \text{Ext}B(X)\}$$

如果 $\lambda(x_0) > 0$, 那么 x_0 叫做 $B(X)$ 的一个 λ -点; 如果对任意的 $x \in B(X)$, 都有 $\lambda(x) > 0$, 那么 Banach 空间 X 叫做具有 λ -性质.

定义 7 如果 $\lambda(X) = \inf\{\lambda(x): x \in B(X)\} > 0$, 那么就说 Banach 空间 X 具有一致 λ -性质.

主要内容:

引理 1^[10] 如果 $\text{Ext}B(X) \neq \emptyset, x, y, z \in B(X)$, 且存在 $\alpha \in (0, 1)$, 使得

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z$$

那么

$$\lambda(x) \geq \alpha \lambda(y)$$

因此 $\lambda(0) = \frac{1}{2}$ 且

$$\lambda(u) \geq \max\{2^{-1}(1 - \|u\|),$$

$$\lambda(u/\|u\|)\|u\|\}(u \neq 0) \in X)$$

引理 2^[10] $x \in S(L_{M,p})$ 是 $B(L_{M,p})$ 的端点的充要条件是:

$$1) k_p^*(x) = k_p^{**}(x) = k < \infty;$$

$$2) kx(t) \in SC_M, \mu - a. e. t \in G;$$

$$3) \|x(t)\| = c_M < \infty, \mu - a. e. t \in G;$$

引理 3^[10] $x \in S(L_{M,p})$ 是 $B(L_{M,p})$ 的端点的充要条件是:

1) 当 $p = 1$ 时, 满足

$$\begin{cases} (a) k_1^*(x) = k_1^{**}(x) < \infty \\ (b) k_1^*(x) \cdot x(t) \in SC_M, \mu - a. e. t \in G; \end{cases}$$

2) 当 $1 < p < \infty$ 时, 满足

$$k_p^*(x) \cdot x(t) \in SC_M, \mu - a. e. t \in G;$$

3) 当 $p = \infty$ 时, 或者满足

$$\textcircled{1} \rho_M(x) = 1 \text{ 且 } x(t) \in SC_M, \mu - a. e. t \in G;$$

或者满足

$$\textcircled{2} \|x(t)\| = c_M < \infty, \mu - a. e. t \in G$$

引理 4^[8] 对于任意的 $1 \leq p \leq \infty, x \in X_{\rho M} \setminus \{0\}$ 和 $a^* > 0$, 有 (i) $k_p^*(x) = ak_p^*(ax)$; (ii) $k_p^{**}(x) = ak_p^{**}(ax)$

引理 5^[10] 对于任意的 Orlicz 函数 M, L_M 空间具有 λ -性质.

引理 6^[10] 对于任意的 Orlicz 函数 M, L_M^o 空间具有 λ -性质.

引理 7^[8] 如果 $1 < p < \infty$, 那么 Orlicz 函数 M 是 K_p 唯一的充要条件是: M 在 $[0, \infty)$ 上是非线性的.

定理 1 $L_{M,p} (1 \leq p \leq \infty)$ 空间具有 λ -性质.

证明: 因为 $L_{M,1} = L_M^o, L_{M,\infty} = L_M$, 根据引理 5 和引理 6 知:

L_M, L_M^o 空间都具有 λ -性质, 所以只需要证明 $1 < p < \infty$ 的情形.

就是要证: 对任意的 $x \in S(L_{M,p}) \setminus \text{Ext}B(L_{M,p})$, 有

$$\lambda(x) > 0 \quad (\text{其中 } 1 < p < \infty)$$

不失一般性, 假设对任意的 $t \in G$, 有

$$x(t) \geq 0$$

由引理 3, 有

$$\mu\{k_p^*(x) \cdot x(t) \notin SC_M\} > 0$$

根据引理 7, M 不是 K_p 唯一的.

在集合 $K_p(x)$ 中选择一点 k, S_M 表示 M 的所有仿射区间, 令

$$y(t) = kx(t) \notin S_M$$

则

$$\|y\|_{M,p} = \|kx\|_{M,p} = k\|x\|_{M,p} = k$$

下面证明 $\frac{y}{\|y\|_{M,p}} \in \text{Ext}B(L_{M,p})$

根据引理 3 的 (2), 只须证明

$$k_p^* \left(\frac{y}{\|y\|_{M,p}} \right) \frac{y}{\|y\|_{M,p}}(t) \in SC_M, \mu - a. e. \quad t \in G. \quad (1)$$

根据引理 4, 有

$$k_p^* \left(\frac{y}{\|y\|_{M,p}} \right) = \|y\|_{M,p} k_p^*(y)$$

所有式 (1) 就是

$$k_p^*(y) y(t) \in SC_M, \mu - a. e. \quad t \in G. \quad (2)$$

由于 $k_p^*(y)$ 是一常数, $y(t) \notin S_M$, 故式 (2) 显然成立.

令

$$z = \sigma^{-1}(kx - (1 - \sigma)y) \quad (\text{其中 } 0 < \sigma < 1)$$

则 $\|z\|_{M,p} = \|\sigma^{-1}(kx - (1 - \sigma)y)\|_{M,p} \leq \sigma^{-1}(\|kx\|_{M,p} - (1 - \sigma)\|y\|_{M,p}) = \sigma^{-1}(k - (1 - \sigma)k) = k$

另一方面, 由于 $kx = (1 - \sigma)y + \sigma z$, 对上式两边同时取范数, 得

$$\|kx\|_{M,p} = \|(1 - \sigma)y + \sigma z\|_{M,p}$$

即

$$\begin{aligned} k &= \|(1 - \sigma)y + \sigma z\|_{M,p} \leq \|(1 - \sigma)y\|_{M,p} + \|\sigma z\|_{M,p} \\ &= (1 - \sigma)\|y\|_{M,p} + \sigma\|z\|_{M,p} = 1 - \sigma + \sigma\|z\|_{M,p} \end{aligned}$$

也就是

$$\|z\|_{M,p} \geq k$$

从而

$$\|z\|_{M,p} = k$$

故

$$x = \frac{1 - \sigma}{k}y + \frac{\sigma}{k}z = (1 - \sigma)\frac{y}{\|y\|_{M,p}} + \sigma\frac{z}{\|z\|_{M,p}}$$

根据引理 1, 有

$$\lambda(x) \geq 1 - \sigma > 0$$

综上, $L_{M,p} (1 \leq p \leq \infty)$ 空间具有 λ -性质.

引理 8^[10] 如果 Banach 空间 X 具有 λ -性质, 则

$$B(X) = \overline{\text{coExt}B(X)}$$

且对任意的 $x \in B(X)$, 有

$$x = \sum \lambda_i e_i \quad \text{其中 } e_i \in \text{Ext}B(X), \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1$$

推论 1 $B(L_{M,p}) = \overline{\text{coExt}B(L_{M,p})}$, 且对任意的 $x \in B(L_{M,p})$, 有 $x = \sum \lambda_i e_i$,

其中 $e_i \in \text{Ext}B(X)$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$

引理 9^[10] L_M 空间具有一致 λ -性质的充要条件是: Orlicz 函数 M 是严格凸的.

引理 10^[10] L_M^o 空间具有一致 λ -性质的充要条件是:

$$\sup\{b_i/a_i; b_i > 1\} < \infty$$

其中 $\{[a_i, b_i]\}_i$ 是 Orlicz 函数 M 的所有仿射区间.

定理 2 $L_{M,p} (1 < p < \infty)$ 空间具有一致 λ -性质的充要条件是:

$$\text{Ext}B(L_{M,p}) \neq \Phi$$

证明: 充分性, 对任意的 $x \in B(L_{M,p}) \setminus \{0\}$, 有

$$x = \|x\|_{M,p} \cdot \frac{x}{\|x\|_{M,p}} + (1 - \|x\|_{M,p}) 0$$

由于 $\text{Ext}B(L_{M,p}) \neq \Phi$, 根据引理 1, 有

$$\lambda(x) > \max\{\|x\|_{M,p}, 2^{-1}(1 - \|x\|_{M,p})\} \geq \frac{1}{3}$$

又 $\lambda(0) = \frac{1}{2}$, 所以

$$\lambda(L_{M,p}) > 0$$

必要性反证法, 假若:

$$\text{Ext}B(L_{M,p}) = \Phi$$

由于 $L_{M,p}$ 空间具有 λ -性质, 根据推论 1, 有

$$B(L_{M,p}) = \overline{\text{coExt}B(L_{M,p})} = \overline{\text{co}\Phi} = \Phi$$

而 $L_{M,p}$ 空间的单位球面不可能是空集, 所以假设不成立.

所以

$$\text{Ext}B(L_{M,p}) \neq \Phi$$

综合引理 9, 引理 10, 定理 2, 得到如下推论:

推论 2 $L_{M,p} (1 \leq p \leq \infty)$ 空间具有一致 λ -性质的充要条件是:

1) 当 $p = 1$ 时, $\sup\{b_i/a_i; b_i > 1\} < \infty$, 其中 $\{[a_i, b_i]\}_i$ 是 Orlicz 函数 M 的所有仿射区间.

2) 当 $1 < p < \infty$ 时, $\text{Ext}B(L_{M,p}) \neq \Phi$

3) 当 $p = \infty$ 时, Orlicz 函数 M 是严格凸的.

引理 11^[10] 如果 Banach 空间 X 具有一致 λ -性质, 那么对于任意的

$$x \in B(X), \text{ 有}$$

$$x = \sum \lambda_i e_i, (\text{其中 } e_i \in \text{Ext}B(X), \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1)$$

且 $x = \sum \lambda_i e_i$ 一致收敛.

推论 3 对任意的 $x \in B(L_{M,p})$, 有

$$x = \sum \lambda_i e_i, (\text{其中 } e_i \in \text{Ext}B(L_{M,p}), \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1)$$

且 $x = \sum \lambda_i e_i$ 一致收敛.

(下转第 112 页)

$\cdots, z_m$, 然后计算得 W_1 ;

2) 重复 (1) n 次, 得到 $\hat{W}_1, \hat{W}_2, \cdots, \hat{W}_n$, 并记其次顺统计量为 $\hat{W}_{(1)}, \hat{W}_{(2)}, \cdots, \hat{W}_{(n)}$.

3) 那么系统可靠度 $1 - \alpha$ 置信下限近似为 $\hat{\psi} - n^{-\frac{1}{3}} \hat{W}_{(1-p)}$.

参考文献:

- [1] 郑祖康, 丁邦俊. 关于区间数据的分布函数估计问题 [J]. 应用概率统计, 2004, 12(2): 35 - 38.
- [2] ARAGON J, EBERLY D. On Convergence of Convex Minorant Algorithms for Distribution Estimation with Interval Censored Data, J. of Computational and Graphical Statist, 1992(1): 129 - 140.
- [3] FRYDMAN H. A Note on Nonparametric Estimation of the Distribution Function from Interval-censored and Truncated Observation [J]. J. Roy. Statist. Soc. B, 1994(56): 71 - 74.
- [4] GESKUS R, GROENEBOOM P. Asymptotically Optimal Estimation of Smooth Functional for Interval-censoring [J]. Case2, Ann. Statist, 1999(27): 627 - 674.
- [5] 刘秀芳. 随机变量的连续函数的收敛性 [J]. 北京师范大学学报, 1981(3): 21 - 22.
- [6] 于丹, 赵勇辉, 薛宏旗. 指数寿命定时截尾数据情形下可靠度的置信限 [J]. 系统科学与数学, 1999, 19(2): 240 - 245.
- [7] 闫霞, 于丹, 李国英. 求参数函数置信限的一般性 WCF 方法及其应用 [J]. 数学物理学报, 2007, 27A(2): 229 - 239.
- [8] 于丹. 复杂系统可靠性分析中的若干统计问题与进展 [J]. 系统科学与数学, 2007, 27(1): 68 - 81.
- [9] 李学京. 可靠性综合验证方法研究 [D]. 北京: 中国科学院文献情报中心, 2007: 42 - 47.
- [10] ZHANG Guozhi, LIU Di, KONG Fanliang, YANG Zhenhai. Expression and Algorithm Implementation of Reliability for Complex System [J]. Advances in Systems Science and Applications, 2008, 8(4): 421 - 429.
- [11] ZHANG Guozhi. Properties of Estimation of Distribution Function for Complex System [J]. Advances in Systems Science and Applications, 2008, 8(4): 667 - 674.

(编辑: 付长缨)

(上接第 107 页)

参考文献:

- [1] 吴从炘, 王廷辅. Orlicz 空间及其应用 [M]. 哈尔滨: 黑龙江科技出版社, 1983: 1 - 201.
- [2] 吴从炘, 王廷辅, 陈述涛. Orlicz 空间几何理论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986: 1 - 200.
- [3] CUI Y A, HUDZIK H, PETROT N. Basic Topological and Geometric Properties of Cesaro-Orlicz Spaces [J]. Proc. Indian Acad. Sci., 2005, 115(4): 461 - 476.
- [4] 段丽芬, 崔云安. 广义 Orlicz 范数和广义 Luxemburg 范数 [J]. 兰州理工大学学报, 2006, 4(32): 131 - 134.
- [5] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1986: 6 - 12.
- [6] 段丽芬, 崔云安. Orlicz 空间的 k -端点和 k -强端点 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2004, 4(9): 132 - 135.
- [7] 崔云安, 王廷辅. Orlicz 空间的强端点 [J]. 数学杂志, 1987(4): 335 - 340.
- [8] 段丽芬, 崔云安. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的端点 [J]. 浙江大学学报, 2007, 34(3): 251 - 256.
- [9] CUI Y A, DUAN L F, HUDZIK H. Basic Theory of p -Amemiya Norm in Orlicz Spaces ($1 \leq p \leq \infty$): Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Equipped with These Norm [J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(5-6): 1796 - 1816.
- [10] CHEN S T. Geometry of Orlicz Space [M]. Warszawa: Dissertation Math., 1992: 1 - 191.

(编辑: 付长缨)